

Хмельник С. И.

# Структура постоянного тока

## Аннотация

| Рассматривается структура постоянного тока в проводе.

## Оглавление

1. Введение
  2. Математическая модель
  3. Решение уравнений
  4. Структура токов
  5. Мощность
- Приложение  
Литература

## 1. Введение

В [1] было показано, что постоянный ток в проводе имеет сложную структуру и этим можно обосновать утверждения о том, что основной поток электромагнитной энергии

- направлен вдоль оси провода,
- распространяется вдоль оси провода,
- распространяется внутри провода,
- компенсирует тепловые потери осевой составляющей тока.

Ниже структура постоянного тока рассматривается более строго.

## 2. Математическая модель

Ток в проводе принято рассматривать как усредненный поток электронов. Механические взаимодействия электронов с атомами считаются эквивалентными электрическому сопротивлению.

При моделировании тока будем использовать цилиндрические координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Уравнения Максвелла для магнитных напряженностей и токов в стационарном магнитном поле имеют вид

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}) = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}, \quad (2)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (5)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z + J_o, \quad (6)$$

Модель основана на том, что

1. основная электрическая напряженность  $E_o$  направлена вдоль оси провода,
2. она создает основной ток  $J_o$  – вертикальный поток зарядов,
3. вертикальный ток  $J_o$  формирует кольцевое магнитное поле с напряженностью  $H_\varphi$  и радиальное магнитное поле  $H_r$  - см. (6),
4. магнитное поле  $H_\varphi$  отклоняет силами Лоренца заряды вертикального потока в радиальном направлении, создавая – радиальный поток зарядов - радиальный ток  $J_r$ ,
5. магнитное поле  $H_r$  отклоняет силами Лоренца заряды радиального потока перпендикулярно радиусам, создавая вертикальный ток  $J_z$  (дополнительно к току  $J_o$ ),
6. магнитное поле  $H_r$  отклоняет силами Лоренца заряды вертикального потока перпендикулярно радиусам, создавая кольцевой ток  $J_\varphi$ ,
7. магнитное поле  $H_r$  отклоняет силами Лоренца заряды кольцевого потока вдоль радиусов, создавая вертикальный ток  $J_z$  (дополнительно к току  $J_o$ ),
8. ток  $J_r$  формирует вертикальное магнитное поле  $H_z$  и кольцевое магнитное поле  $H_\varphi$  - см. (4),
9. ток  $J_\varphi$  формирует вертикальное магнитное поле  $H_z$  и радиальное магнитное поле  $H_r$  - см. (5),
10. ток  $J_z$  формирует кольцевое магнитное поле  $H_\varphi$  и радиальное магнитное поле  $H_r$  - см. (6),
11. токам соответствуют одноименные электрические напряженности, т.е.

$$E = \rho \cdot J, \quad (7)$$

где  $\rho$  - электросопротивление.

Таким образом, основной ток  $J_o$  создает дополнительные токи  $J_r$ ,  $J_\varphi$ ,  $J_z$  и магнитные поля  $H_r$ ,  $H_\varphi$ ,  $H_z$ . Они должны удовлетворять уравнениям Максвелла (3-6). Кроме того, токи должны удовлетворять условию непрерывности

$$\operatorname{div}(J) = 0. \quad (8)$$

Прежде всего, необходимо доказать, что решение системы (3-8) существует при ненулевых токах  $J_r$ ,  $J_\varphi$ ,  $J_z$ .

### 3. Решение уравнений

Из физических соображений ясно, что поле должно быть однородным вдоль вертикальной оси, т.е. должны отсутствовать производные по аргументу  $z$ , и, следовательно, уравнения (3-6, 8) должны быть переписаны в виде:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = J_r, \quad (10)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (11)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z + J_o, \quad (12)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (13)$$

Решение системы уравнений дано в приложении 1, где показано, что при данных  $j_\varphi$ ,  $h_\varphi$  определены

$$H_r = \frac{\alpha}{2} h_\varphi r \sin(\alpha\varphi), \quad (14)$$

$$H_\varphi = h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + \frac{J_o r}{2}, \quad (15)$$

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi), \quad (16)$$

$$J_r = -\frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi), \quad (17)$$

$$J_{\varphi \cdot} = j_{\varphi} r \sin(\alpha \varphi), \tag{18}$$

$$J_z = J_o + h_{\varphi} (1 + \alpha - \alpha^2 / 2) \cos(\alpha \varphi). \tag{19}$$

### 4. Структура токов

На основе уравнений (17-19) рассмотрим распределение токов в объеме цилиндрического провода. Все примеры показаны при  $j_{\varphi} = 1, h_{\varphi} = 1, \alpha = 10, R = 50$ .

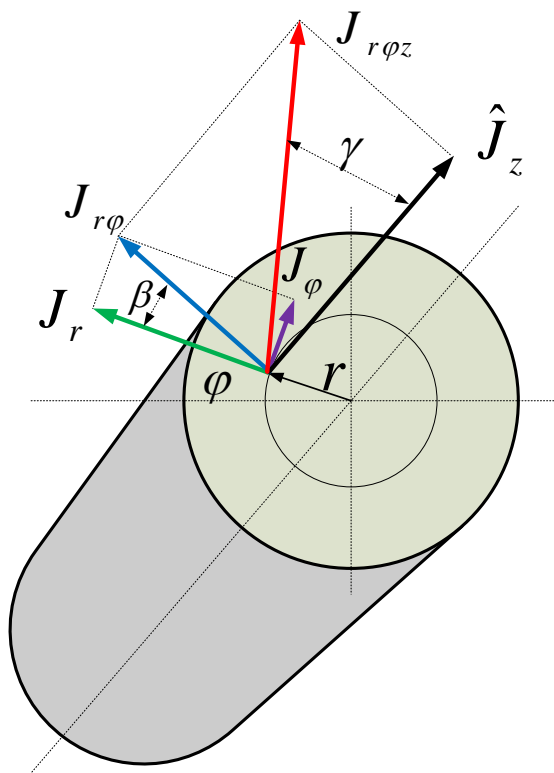
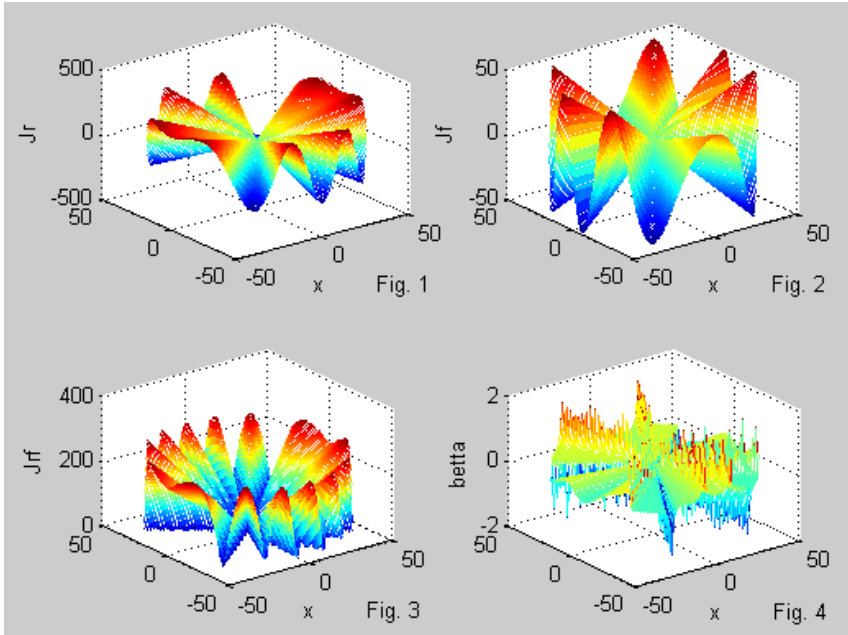


Рис. 0.

На рис. 0 показаны векторы токов  $J_r, J_{\varphi}, J_z$ . На этом рисунке при фиксированном значении  $\varphi$  показаны также вектор  $J_{r\varphi}$  (равный сумме векторов  $J_r$  и  $J_{\varphi}$ ) и вектор  $J_{r\varphi z}$  (равный сумме векторов  $J_{r\varphi}$  и  $J_z$ ). Вектор  $J_{r\varphi}$  составляет с радиусом угол  $\beta$ . Видно, что вектор  $J_{r\varphi z}$  направлен под некоторым углом  $\gamma$  к оси цилиндра.



На рис. 1, 2, 3, 4 показаны величины  $J_r$ ,  $J_\varphi$ ,  $J_{r\varphi}$ ,  $\beta$  на плоскости сечения  $(r, \varphi)$ . На рис. 5 показаны линии токов  $J_r$ ,  $J_\varphi$  на этой плоскости при  $\alpha = 8$ . Важно отметить, что на линиях тока  $J_r$  ток  $J_\varphi = 0$ . Видно, что непрерывность линий тока соблюдается – см. (13).

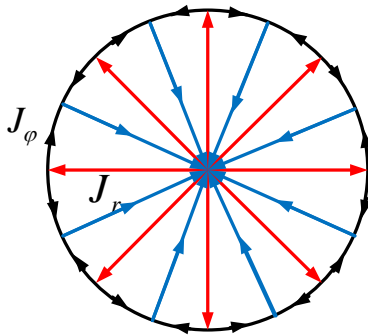


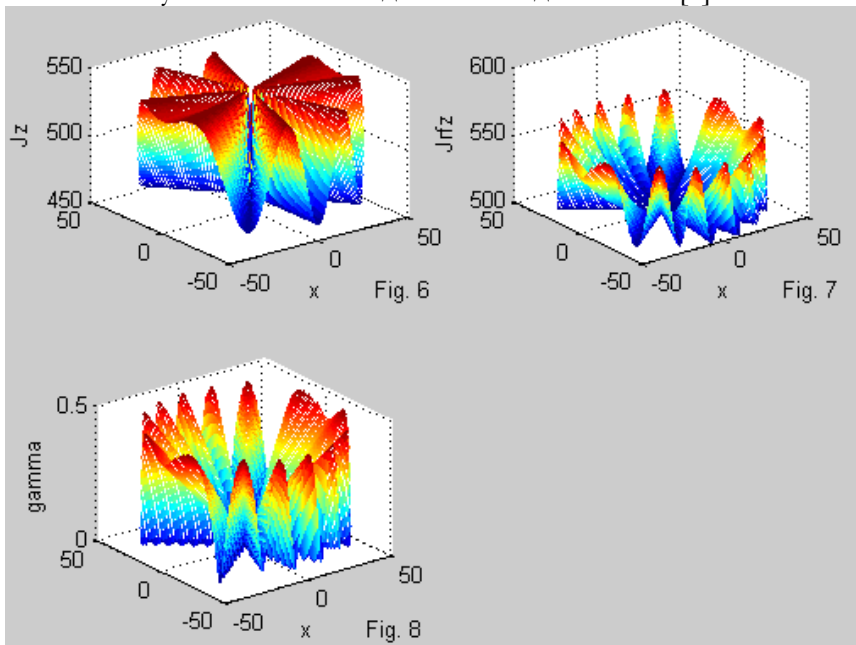
Рис. 5.

Точно так же изображаются линии напряженностей  $H_r$ ,  $H_\varphi$  на плоскости сечения  $(r, \varphi)$ . Отличие заключается в том, что на линиях напряженностей  $H_r$  напряженность  $H_\varphi = J_o r / 2$  – см. (15). Видно, что непрерывность силовых линий также соблюдается – см. (9).

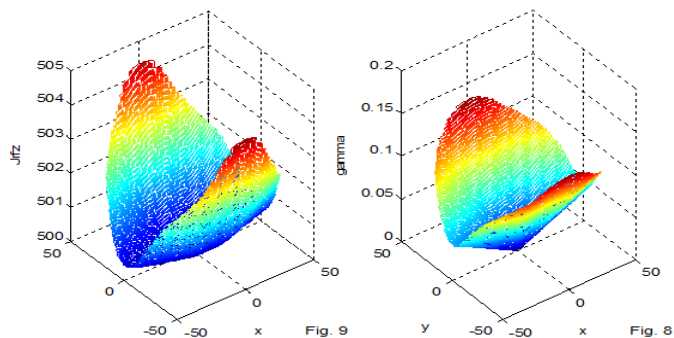
Важно отметить, что на окружности внешнего радиуса  $R$  напряженность  $H_\varphi$  не постоянна, определяется из (15) и имеет вид:

$$H_{\varphi R} = h_\varphi R \cos(\alpha\varphi) + J_o R/2 \tag{20}$$

На рис. 6 показана величина  $J_z$  на плоскости сечения  $(r, \varphi)$ . На рис. 7, 8 показаны величины  $J_{r\varphi z}$ ,  $\gamma$  на плоскости сечения  $(r, \varphi)$  при  $J_o = 500$ . Видно, что линии тока  $J_{r\varphi z}$  всегда наклонены к оси цилиндра. Именно этот факт был основным аргументом при обосновании указанных во введении выводов статьи [1]



Заметим, что существуют случаи, когда угол  $\gamma$  является постоянным. Например, на рис. 9, 10 показаны величины  $J_{r\varphi z}$ ,  $\gamma$  при  $\alpha = 2$ .



## 5. Мощность

Найдем плотность мощности тепловых потерь, обозначая через  $R$  - внешний радиус провода,  $L$  - длину провода,  $\rho$  - электросопротивление.

Ток  $J_r$  течет через сечение  $Lr \cdot d\varphi$  на длине  $dr$ . Поэтому мощность потерь от этих токов равна следующему интегралу:

$$P_r = \rho L \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (J_r)^2 d\varphi = \frac{\rho L \alpha^2}{4} j_\varphi^2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (r \cos(\alpha\varphi))^2 d\varphi$$

или

$$P_r = \frac{\pi \rho \alpha^2 R^4 L}{16} j_\varphi^2. \quad (21)$$

Ток  $J_\varphi$  течет через сечение  $L \cdot dr$  на длине  $r \cdot d\varphi$ . Поэтому мощность потерь от этих токов равна следующему интегралу:

$$P_\varphi = \rho L \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (J_\varphi)^2 d\varphi = \rho L j_\varphi^2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (r \sin(\alpha\varphi))^2 d\varphi$$

или

$$P_\varphi = \frac{\pi \rho R^4 L}{4} j_\varphi^2. \quad (22)$$

Ток  $J_z$  течет через сечение  $r \cdot d\varphi \cdot dr$  на длине  $L$ . Поэтому мощность потерь от этих токов равна следующему интегралу:

$$\begin{aligned} P_z &= \rho L \pi R^2 J_o^2 + \rho L \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (J_z)^2 d\varphi = \\ &= \rho L \pi R^2 J_o^2 + \rho L h_\varphi^2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \left( (1 + \alpha - \alpha^2/2) \cos(\alpha\varphi) \right)^2 d\varphi = \\ &= \rho L \pi R^2 J_o^2 + \frac{\pi R^2}{2} \rho L h_\varphi^2 (1 + \alpha - \alpha^2/2)^2 \end{aligned}$$

или

$$P_z = \rho L \pi R^2 \left( J_o^2 + \frac{1}{2} h_\varphi^2 (1 + \alpha - \alpha^2/2)^2 \right). \quad (23)$$

Итак,

$$P = \begin{bmatrix} P_r \\ P_\varphi \\ P_z \end{bmatrix} = \pi R^2 L \rho \begin{bmatrix} P_r = \alpha^2 R^2 j_\varphi^2 / 16 \\ P_\varphi = R^2 j_\varphi^2 / 4 \\ P_z = J_o^2 + h_\varphi^2 (1 + \alpha - \alpha^2/2)^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

и

$$P = P_r + P_\varphi + P_z = \pi R^2 L \rho \left( \begin{array}{l} j_\varphi^2 R^2 (1/4 + \alpha^2/16) + J_o^2 \\ + h_\varphi^2 (1 + \alpha - \alpha^2/2)^2 \end{array} \right) \quad (25)$$

В электрических цепях постоянного тока соблюдается принцип минимума тепловых потерь. Впервые на такое свойство электрических цепей обратил внимание Максвелл [2], который обнаружил, что в цепях с сопротивлениями токи минимизируют мощность тепловых потерь. Минимум мощности (25) соблюдается при

$$\left( j_\varphi^2 R^2 (1/4 + \alpha^2/16) + h_\varphi^2 (1 + \alpha - \alpha^2/2)^2 \right) \rightarrow \min \quad (26)$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{j_\varphi^2 R^2 (1/4 + \alpha^2/16)} = -\sqrt{h_\varphi^2 (1 + \alpha - \alpha^2/2)^2}$$

или

$$j_\varphi = h_\varphi \eta / R, \quad (27)$$

где

$$\eta = -\frac{1}{2} (1 + \alpha - \alpha^2/2) \sqrt{4 + \alpha^2}. \quad (28)$$

Подставляя (27, 28) в (25), получаем:

$$\begin{aligned} P &= P_r + P_\varphi + P_z = \pi R^2 L \rho \left( J_o^2 + h_\varphi^2 \left( \begin{array}{l} \eta^2 (1/4 + \alpha^2/16) + \\ + (1 + \alpha - \alpha^2/2)^2 \end{array} \right) \right) = \\ &= \pi R^2 L \rho \left( J_o^2 + h_\varphi^2 (1 + \alpha - \alpha^2/2)^2 \left( \begin{array}{l} \frac{1}{4} \frac{(1/4 + \alpha^2/16)}{4 + \alpha^2} + \\ + 1 \end{array} \right) \right) \end{aligned}$$

или

$$P \approx \pi R^2 L \rho (J_o^2 + h_\varphi^2 (1 + \alpha - \alpha^2/2)^2). \quad (29)$$

Энергия, расходуемая силами Лоренца для создания дополнительных токов  $J_r$ ,  $J_\varphi$ ,  $J_z$ , доставляется основным током  $J_o$ . Следовательно, создание дополнительных токов эквивалентно увеличению сопротивления на некоторую величину  $\Delta\rho$ . Этот факт можно записать в следующем виде:

$$(\rho + \Delta\rho) \cdot \pi R^2 J_o^2 L = P. \quad (30)$$

Из (29, 30) следует, что



$$\frac{\Delta\rho}{\rho} J_o^2 = h_\varphi^2 (1 + \alpha - \alpha^2/2)^2 \quad (31)$$

### Пример.

Все вычисления будем выполнять в системе СИ. Найдем максимальные токи и напряженности из (14-19):

$$\begin{aligned} H_{r.} &= \frac{\alpha}{2} h_\varphi R, \quad H_{\varphi.} = h_\varphi R + \frac{J_o R}{2}, \quad H_z = \frac{1}{2} j_\varphi R^2, \\ J_{r.} &= \frac{\alpha}{2} j_\varphi R, \quad J_{\varphi.} = j_\varphi R, \quad J_z = h_\varphi (1 + \alpha - \alpha^2/2). \end{aligned} \quad (32)$$

Пусть в формуле (31)  $\Delta\rho/\rho = 0.01$ . Тогда

$$h_\varphi = \frac{0.1}{(1 + \alpha - \alpha^2/2)} J_o. \quad (33)$$

Пусть еще  $\alpha = 2$ ,  $R = 0.001$ . Тогда из (33, 28, 27) найдем  $h_\varphi \approx 0.1 J_o$ ,  $\eta = -1.4$ ,  $j_\varphi = -1400 h_\varphi = -140 J_o$ , а из (32) найдем:

$$\begin{aligned} H_{r.} &\approx 10^{-4} J_o, \quad H_{\varphi.} \approx 7 \cdot 10^{-4} J_o, \quad H_z \approx 7 \cdot 10^{-4} J_o, \\ J_{r.} &= 0.14 J_o, \quad J_{\varphi.} = 0.14 J_o, \quad J_z = h_\varphi = 0.1 J_o. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, существуют условия, при которых рассматриваемая структура тока возможна.

## Приложение

Рассматривается решение уравнений (9-13). Из физических соображений ясно, что поле должно быть однородным вдоль вертикальной оси, т.е. должны отсутствовать производные по аргументу  $z$ , и, следовательно, уравнения (9-13) основного раздела должны быть переписаны в виде:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = J_r, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z + J_o, \quad (4)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (5)$$

Предположим, что

$$H_r = h_r r \sin(\alpha\varphi) \quad (6)$$

$$H_\varphi = h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + \frac{J_o r}{2} \quad (7)$$

Из (1, 6, 7) следует:

$$\frac{h_r r \sin(\alpha\varphi)}{r} + h_r \sin(\alpha\varphi) - h_\varphi \alpha \sin(\alpha\varphi) = 0, \quad (8)$$

Следовательно,

$$h_r = h_\varphi \alpha / 2. \quad (9)$$

Из (4, 6, 7) следует:

$$\frac{h_\varphi r \cos(\alpha\varphi)}{r} + h_\varphi \alpha \cos(\alpha\varphi) - h_r \alpha \cos(\alpha\varphi) = J_z, \quad (10)$$

Из (9, 10) следует:

$$J_z = h_\varphi (1 + \alpha - \alpha^2 / 2) \cos(\alpha\varphi). \quad (11)$$

Предположим, далее, что

$$J_r = j_r r \cos(\alpha\varphi), \quad (12)$$

$$J_\varphi = j_\varphi r \sin(\alpha\varphi). \quad (13)$$

Из (5, 11, 12) следует:

$$\frac{j_r r \cos(\alpha\varphi)}{r} + j_r \cos(\alpha\varphi) + j_\varphi \alpha \cos(\alpha\varphi) = 0, \quad (14)$$

Следовательно,

$$j_r = -j_\varphi \alpha / 2 \quad (15)$$

Из (2, 12, 15) находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = -\frac{\alpha}{2} j_r r^2 \cos(\alpha\varphi), \quad (16)$$

Из (15, 16) следует, что

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) \quad (17)$$

Из (3, 13) находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = -j_\varphi r \sin(\alpha\varphi), \quad (18)$$

Из (18) следует, что

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) \quad (19)$$

Формулы (17, 19) совпадают, что свидетельствует о правильности решения.

### Литература

1. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с постоянным током, «Доклады независимых авторов», изд. «DNA», ISSN 2225—6717, Россия – Израиль, 2015, вып. 32. ISBN 978-1-312-19894-4, printed in USA, Lulu Inc., ID 16319679; <http://vixra.org/pdf/1503.0048v1.pdf>
2. Максвелл Кларк Д. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. 1. М.-Л.: Гостехиздат, 1939, 321 с.
3. Хмельник С. И. Структура постоянного тока, <http://vixra.org/pdf/1503.0241v4.pdf>